**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ   
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное**

**учреждение высшего образования  
 «Севастопольский государственный университет»   
Институт информационных технологий   
и управления в технических системах**

**ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ   
ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ   
И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Методические указания**

к лабораторным работам №6-7 по дисциплине   
**«Специальные главы математики»**для студентов специальности   
09.04.02 - Информационные системы и технологии

**Севастополь**

**2015**

УДК 517.97

Исследование алгоритмов решения задач вариационного исчисления и оптимального управления/Сост. А.Е. Безуглая. — Севастополь: Изд-во СевГУ, 2015. — 13 с.

Целью методических указаний является углубление и закрепление полученных теоретических знаний по дисциплине «Специальные главы математики» в части изучения основ вариационного исчисления и оптимального управления; закрепление умений и навыков работы со специализированными математическими пакетами.

Методические указания предназначены для студентов специальности 09.04.02 - Информационные системы и технологии, институт информационных технологий и управления в технических системах Севастопольского государственного университета.

Методические указания рассмотрены и утверждены на научно-методическом совете института информационных технологий и управления в технических системах СевГУ (протокол № от « \_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2015 г.)

Рецензент:

**СОДЕЖАНИЕ**

[Лабораторная работа №1 «Исследование алгоритма решения простейшей задачи вариационного исчисления» 4](#_Toc437740731)

[лабораторная работа №2 «Исследование алгоритма решения задачи оптимального управления» 9](#_Toc437740732)

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1 «Исследование алгоритма решения Простейшей задачи вариационного исчисления»

**Цели лабораторной работы**. Исследовать алгоритм решения простейшей задачи вариационного исчисления. Ознакомиться с теоретическими сведениями, освоить технологию программной реализации простейшей вариационной задачи, решаемой на основе уравнения Эйлера, в пакете математического программирования.

**Трудоемкость лабораторной работы:** 6 ч (4 ч – аудиторных, 2 ч – самостоятельная работа студента)**.**

**Компетенции студента, формируемые в результате выполнения лабораторной работы.**

* ОПК-1: способность воспринимать математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания, умением самостоятельно приобретать, развивать и применять их для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте ;
* ПК-9: умение проводить разработку и исследование методик анализа, синтеза, оптимизации и прогнозирования качества процессов функционирования информационных систем и технологий.

**Краткие теоретические сведения.**

Постановка простейшей задачи вариационного исчисления

Пусть **М** – некоторое пространство функций. Отображение называется *функционалом*.

Ниже будем рассматривать следующие пространства функций:

C[*t*1,*t*2] – непрерывные на отрезке [*t*1,*t*2] функции, с нормой, определенной следующим образом: ;

C1[*t*1,*t*2] – непрерывно-дифференцируемые на отрезке [*t*1, *t*2] функции, с нормой .

*Простейшая задача вариационного исчисления* формулируется следующим образом: найти экстремум функционала вида:

(1)

*x*(*t*1) = *x*1; *x*(*t*2) = *x*2 (2)

на кусочно-гладких функциях *x(t)*, соединяющих точки (*t*1, *x*1) и (*t*2, *x*2), т.е. удовлетворяющих краевым условиям (2). Функции *x(t*), удовлетворяющие ограничениям задачи (в данном случае граничным условиям), называются *допустимыми*.

Определение.Говорят, что *x*\* доставляет *слабый локальный максимум* функционалу *J*, если : для любой допустимой кривой *x* такой, что , выполнено: .

Говорят, что *x*\* доставляет *сильный локальный максимум* функционалу *J*, если для любой допустимой кривой *x*, такой, что , выполнено: .

Необходимое условие слабого экстремума функционала (1) дается *уравнением Эйлера*:

(3)

В уравнении (3) и далее используются следующие обозначения:

– полная производная по времени *t*;

- частная производная от функционала *F* по *x*, т.е.;

- частная производная от функционала *F* по , т.е. ;

- вторая частная производная от функционала *F* по *x* и, т.е. и т.д.

Функции, являющиеся решениями уравнения Эйлера, называются экстремалями функционала *J*. Экстремали, удовлетворяющие краевым условиям (2), называются допустимыми экстремалями.

Говорят, что на *x* выполнено *условие Лежандра*, если

(4)

и *усиленное условие Лежандра*, если

(5)

Уравнение относительно функции *h(t)*

, (6)

называют *уравнением Якоби* для исходной задачи на экстремали *x\**.

Точка *τ* называется сопряженной с точкой *t1*, если для решения уравнения Якоби *h(t)* с начальными условиями имеет место равенство .

Говорят, что на *x\** выполнено условие Якоби, если в *интервале* *(t1, t2)* нет точек, сопряженных с *t1*, и усиленное условие Якоби, если в *полуинтервале* *(t1, t2]* нет точек, сопряженных с *t1*.

Функция

(7)

называется *функцией Вейерштрасса* интегранта F.

Говорят, что на *x\** выполнено условие Вейерштрасса, если

. (8)

Алгоритм решения

Для определенности будем исследовать задачу (1), (2) на минимум.

1. Найти допустимые экстремали. С этой целью выписать необходимое условие экстремума первого порядка – уравнение Эйлера (3). Найти решения уравнения Эйлера *x\**, удовлетворяющие заданным условиям на концах (2) – эти решения будут "допустимыми экстремалями".
2. Для каждой допустимой экстремали проверить необходимые и достаточные условия локального минимума второго порядка.
   1. Проверить выполнение условия Лежандра:

– если условие Лежандра не выполнено, т.е. функция знакопеременна на отрезке [t0, t1], то не выполнено необходимое условие слабого (а, следовательно, и сильного) экстремума.

– если выполнено условие Лежандра (4), то *x*\* можно подозревать на точку слабого (сильного) локального минимума.

– если выполнено усиленное условие Лежандра (5), то переходим к проверке условия Якоби.

* 1. Записать уравнение Якоби (6) на экстремали x\* и решить его с начальными данными.
  2. Найти сопряженные с t1 точки τ, т.е. нули найденного решения h(t) уравнения Якоби при t>t1 и проверить выполнение условия Якоби.

Если при выполнении усиленного условия Лежандра условие Якоби не выполнено, то не выполняется необходимое условие. Следовательно, *x\** не доставляет локального минимума.

Если при выполнении усиленного условия Лежандра выполнено усиленное условие Якоби, то выполнено достаточное условие слабого минимума, и *x\** – слабый локальный минимум.

* 1. Проверка на сильный минимум.

– если интегрант F является выпуклым по при всех фиксированных *t* и *x*, рассматриваемых в качестве параметра, то *x\** доставляет сильный минимум в задаче.

– если интегрант F не является ни выпуклым, ни вогнутым, то следует проверить выполнение необходимого условия сильного экстремума - условия Вейерштрасса (8). Если не выполнено условие Вейерштрасса, то в этом случае найденная допустимая экстремаль не доставляет сильного минимума.

Замечание. При исследовании задачи на максимум необходимо следовать этому же алгоритму, учитывая, что условие Лежандра выполнено, если

(9)

и *усиленное условие Лежандра*, если

(10)

Условие Вейерштрасса означает, что

. (8)

а для сильного максимума функция F должна быть вогнутой по .

**Программа и методика выполнения работы.**

1. В соответствии с вариантом задания, приведенным в таблице 1, и алгоритмом решения простейшей задачи вариационного исчисления, приведенным в разделе «Краткие теоретические сведения», для указанного функционала определить все экстремали, удовлетворяющие краевым условиям и проверить, доставляют ли они слабый или сильный минимум.
2. Оформить отчет по работе.

Таблица 1 – Варианты заданий

| Вариант | Функционал | Краевые условия |
| --- | --- | --- |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |
| 10 |  |  |

**Описание лабораторной установки.**

Для выполнения лабораторной работы используются ручные расчеты. Для вычисления частных производных и построения графиков функций может также использоваться компьютер с установленным пакетом математического программирования Maple, Matlab или Mathcad.

**Результаты экспериментальных исследований.**

Полученную в результате исследования функционала на минимум функцию построить в виде графика на интервале [*t*1,*t*2]. Сделать вывод о том, какой минимум доставляет найденная экстремаль в рассматриваемой задаче.

**Содержание отчета.**

Отчет по выполняемой лабораторной работе выполняется каждым студентом индивидуально на листах формата А4 в рукописном или машинном варианте исполнения и должен содержать:

* название работы;
* цель и задачи исследований;
* расчеты в соответствии с алгоритмом решения задачи;
* график полученной функции;
* выводы по работе.

**Контрольные вопросы**

* Почему метод называется вариационным?
* Каковы ограничения метода?
* Что будет, если исходные функции не гладкие?
* Что будет, если на переменные наложены ограничения?
* Когда существуют уравнения Эйлера-Лагранжа?

**Библиографический список рекомендуемой литературы**

1. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс]/ А.Б. Васильева [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.— 430 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17226.— ЭБС «IPRbooks», по паролю,с.355-364.
2. Моклячук М.П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи [Электронный ресурс]: учебник/ Моклячук М.П.— Электрон. текстовые данные.— Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006.— 428 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16495.— ЭБС «IPRbooks», по паролю, с.100-107.
3. Алексеев В.М. Оптимальное управление [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.— 408 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12964.— ЭБС «IPRbooks», по паролю, с.50-68

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 «Исследование алгоритма решения Задачи оптимального управления»

**Цели лабораторной работы**. Исследовать алгоритм решения задачи оптимального управления. Ознакомиться с теоретическими сведениями, освоить технологию программной реализации задачи оптимального управления, решаемой на основе принципа максимума Понтрягина, в пакете математического программирования.

**Трудоемкость лабораторной работы:** 6 ч (4 ч – аудиторных, 2 ч – самостоятельная работа студента)**.**

**Компетенции студента, формируемые в результате выполнения лабораторной работы.**

* ОПК-1: способность воспринимать математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания, умением самостоятельно приобретать, развивать и применять их для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте ;
* ПК-9: умение проводить разработку и исследование методик анализа, синтеза, оптимизации и прогнозирования качества процессов функционирования информационных систем и технологий.

**Краткие теоретические сведения.**

Постановка задачи оптимального управления.

Пусть имеется некоторая динамическая система, *состояние* которой в каждый момент времени *t* описывается вектор-функцией. На состояние системы можно воздействовать, изменяя управляемые параметры *.* Будем рассматривать класс кусочно-непрерывных управлений *u*(*t*).

При заданном *управлении u*(*t*) состояние системы изменяется во времени согласно закону:

.(1)

Рассмотрим *задачу оптимального управления* данной системой: определить управление *u*\*(*t*), доставляющее экстремум *критерию качества* вида:

(2)

При этом первое слагаемое (*интегральная часть* критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления [*t*0, *t*1], тогда как второе слагаемое (*терминальный член*) – только конечный результат воздействия управления, определяемый начальным *x*(*t*0) и конечным *x*(*t*1) состояниями и, возможно, моментами начала и окончания управления *t*0 и *t*1. В зависимости от физического смысла задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий:

, (3)

задающие множества допустимых начальных и конечных состояний системы и моментов начала и окончания управления.

Важным частным случаем (2.3) являются условия вида:

, (4)

соответствующие *закрепленному* левому или правому концу фазовой траектории.

Моменты времени начала и окончания управления, *t*0 и *t*1, могут полагаться как известными, тогда говорят о задаче с *фиксированным* временем управления, или неизвестными (задача с *нефиксированным* моментом начала или окончания управления).

Необходимые условия оптимальности в данной задаче, точнее, необходимые условия сильного локального максимума даются *принципом максимума Понтрягина*.

Принцип максимума Понтрягина

Пусть – оптимальный процесс в задаче (1) – (3). Тогда найдутся одновременно не равные нулю множители

такие, что выполнены следующие условия:

а) *Функция Понтрягина* задачи

(5)

при каждом достигает максимума по *u* в т. *u*\*(*t*), когда , .

б) Вектор-функция удовлетворяет *сопряженной системе* дифференциальных уравнений:

(6)

с краевыми условиями (*условиями трансверсальности*)

;

. (7)

в) Выполнены условия на подвижные концы:

;

; (8)

Замечания

1. Множитель Лагранжа определяет чувствительность оптимального решения задачи к виду интегральной части функционала. В *вырожденном случае* совокупность ограничений задачи такова, что оптимальное управление *u*\*(*t*) не зависит от вида интегранта *F*(*t*, *x*(*t*), *u*(*t*)). При этом из условий принципа максимума следует, что . В *невырожденном случае* , поэтому ее можно положить равной 1 (разделив функцию Н на ). При этом условия принципа максимума не изменятся.

Как правило, из физического смысла задачи понятно, допускаются ли в ней вырожденные решения. При исследовании таких решений необходимо обращать внимание на выполнение условия теоремы о том, что множители и не могут одновременно быть равными 0.

1. Для задачи с закрепленными концами (4) сопряженная функция имеет свободные концы, т.е. соответствующие условия трансверсальности отсутствуют.

Обратно, для задачи со свободными концами, не содержащей ограничений (3), сопряженная функция имеет закрепленные концы, определяемые соотношениями:

;

. (9)

**Программа и методика выполнения работы.**

1. В соответствии с вариантом задания, приведенным в таблице 1, и алгоритмом решения задачи оптимального управления, приведенным в разделе «Краткие теоретические сведения», найти оптимальное управление в задаче.
2. Оформить отчет по работе.

Таблица 1 – Варианты заданий

| Вариант | Функционал | Ограничения | Краевые условия |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  |  |
| 10 |  |  |  |

**Описание лабораторной установки.**

Для выполнения лабораторной работы используются ручные расчеты. Для вычисления частных производных и построения графиков функций может также использоваться компьютер с установленным пакетом математического программирования Maple, Matlab или Mathcad.

**Результаты экспериментальных исследований.**

Полученные в результате решения задачи функции оптимального управляемого процесса построить в виде графиков на интервале [*t*0,*t*1]. Сделать вывод по найденным соотношениям для оптимального управления.

**Содержание отчета.**

Отчет по выполняемой лабораторной работе выполняется каждым студентом индивидуально на листах формата А4 в рукописном или машинном варианте исполнения и должен содержать:

* название работы;
* цель и задачи исследований;
* расчеты в соответствии с алгоритмом решения задачи;
* графики полученных процессов;
* выводы по работе.

**Контрольные вопросы**

* В чем физический смысл принципа максимума?
* Является ли принцип максимума вариационным методом?
* Формулировка принципа максимума.
* Что такое сопряженная функция?
* К чему сводится задача оптимизации в принципе максимума?
* Как решать двухточечную граничную задачу?
* Как влияет на ход решения задачи добавление ограничений на переменные управления и состояния?
* Каково главное свойство гамильтониана?
* Кто разработал принцип максимума?
* Из чего получается дифференциальное уравнение для вектора сопряженного состояния?

**Библиографический список рекомендуемой литературы**

1. Моклячук М.П. Вариационное исчисление. Экстремальные задачи [Электронный ресурс]: учебник/ Моклячук М.П.— Электрон. текстовые данные.— Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006.— 428 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16495.— ЭБС «IPRbooks», по паролю, с.312-340.
2. Алексеев В.М. Оптимальное управление [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.— 408 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12964.— ЭБС «IPRbooks», по паролю, с.73-90